Point-condensation phenomena and saturation effect on pattern formation problems (Theory of Biomathematics and its Applications VI)

森本, 光太郎

数理解析研究所講究録
第 1704 巻 2010 年 151-157

Point-condensation phenomena and saturation effect on pattern formation problems

首都大学東京大学院理工学研究科　森本　光太郎 [1] (Kotaro Morimoto)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University

1 序章

生物のパターン形成における活性因子と抑制因子についての反応拡散系であるギーラー・マインハルト系 [3] について，様々な研究がなされているが，ここではその定常解の漸近的な形状と飽和効果の関係についての概説を述べる．一般の N 次元有界領域 Ω におけるギーラー・マインハルト系は次で記述される：

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t}=\varepsilon^{2}\Delta A-A+\frac{A^{2}}{H(1+\kappa A^{2})}\ in\ \Omega\times(0,\infty),\\ \tau\frac{\partial H}{\partial t}=D\Delta H-H+A^{2}\ in\ \Omega\times(0,\infty),\\ \frac{\partial A}{\partial\nu}=\frac{\partial H}{\partial\nu}=0\ on\ \partial\Omega\times(0,\infty),\\ A(x,0)=A_{0}(x),\ H(x,0)=H_{0}(x),\ x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$A=A(x,t), H=H(x,t)$ は場所 x，時刻 t における活性因子と抑制因子の濃度を表す．A_0 と H_0 はそれらの初期値である．境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかなものとし，ν は境界 $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルを表す．$\varepsilon, D>0$ はそれぞれ活性因子と抑制因子の拡散係数である．$\tau>0$ は定数．先に，(1) に対応するシャドウ系を導入しておく．(1) の第二式において，両辺を D で割った後に形式的に $D\to\infty$ の極限を取ると，H は次を満たす事になる：

$$\Delta H(x,t)=0,\ \frac{\partial H}{\partial\nu}=0,\ x\in\Omega,\ t>0.$$

[1] Supported by Research Fellowships of Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists

同次ノイマン条件を満たす調和関数は定数に限るため，この時 $H(x,t)$ は x によらない関数 $\xi(t)$ に置き換えられる．この考察の下，$D\to\infty$ の極限状態を表す (1) の極限方程式として，次のシャドウ系が得られる：

$$\begin{cases}\frac{\partial A}{\partial t}=\varepsilon^2\Delta A-A+\frac{A^2}{\xi(1+\kappa A^2)}\ in\ \Omega\times(0,\infty),\\ \tau\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\xi+\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A^2dx,\ t>0,\\ \frac{\partial A}{\partial\nu}=0\ on\ \partial\Omega.\end{cases}\tag{2}$$

ギーラー・マインハルト系，及びそのシャドウ系の定常解については非常に多くの研究があるが，特に (1) は $\varepsilon<<D$ の時に空間的に非一様な解が安定な解として現れることが知られている．また，飽和パラメータ κ の値によって異なるタイプの定常解が現れる事が知られている．以下に，κ が 0 の場合とそうでない場合とで，どのような定常解の構成が過去に成されてきたかを述べる．

(1) 飽和効果のない場合 ($\kappa=0$).

この場合には，十分小さな $\varepsilon>0$ に対し，領域上の非常に狭い範囲に活性因子の濃度が凝縮した定常解の存在が知られている．そういったタイプの解は，ε を小さくしていくに連れ，$\overline{\Omega}$ 上の有限個の点にその濃度が凝縮されていくことから，点凝集解やスパイク解と呼ばれている．(2) 及び (1) に対する点凝集解の存在についての最初の研究は，高木泉教授によってなされた [14]．そこでは一次元区間において，まず十分小さな $\varepsilon>0$ に対してシャドウ系の点凝集解を構成し，その後，十分大きな $D>0$ に対してシャドウ系の解の近くに (1) の定常解の構成がなされている．一般 N 次元領域においては，峠の補題を用いたシャドウ系の解の構成や，$\varepsilon\to 0$ の時の解の漸近挙動などが研究されている [6, 10, 11]．峠の補題を用いて構成されたシャドウ系の解は最小エネルギーパターンと呼ばれているが，その解は領域の境界上の一点にピークを持つ点凝集解であり，その点は境界の内向きの平均曲率が最大となる点である事が知られている．また，領域が軸対称な場合に，境界に複数のピークを持つ点凝集解の構成がなされている [12]．定常解の安定性については，一次元の場合にはシャドウ系は単調な解しか安定にはなり得ない事が知られている [9]．従って，一次元の有界区間における安定な点凝集解があったとすると，そのピーク点は一つであり，かつ区間の端点になければならない．しかし，$D>0$ が有限でそれほど大きくない場合には，状況は一変する．実は，$D>0$ を小さくしていくと，複数の点にピークを持つような点凝集解でも安定になりうることが [19] において示されている．二次元領域においても，内部に複数のピークを持つ解の構成や安定性についての研究がなされている [15, 17].

(2) 飽和効果のある場合 ($\kappa>0$).

適当な条件の下で κ が非常に大きい時には，ギーラー・マインハルト系は定数解しか定常解を持たない事が [1] により示されている．従って，定数解以外の空間的に非一様な解の存在を考察する上では $\kappa > 0$ は十分小さいものとしなくてはならない．十分小さな $\kappa > 0$ に対し，$D > 0$ は十分大きく，$\varepsilon > 0$ は十分小さいものとする．この時，一次元ギーラー・マインハルト系は内部遷移解を持つことが知られている [7]．つまり，活性因子の濃度がある点の付近で急激に遷移を示している解である．これは，(1) の活性因子についての方程式の非線形項が双安定的な構造を持つ事による．多次元領域においても，同様の内部遷移解の存在が期待できるが，一般領域における解析は遷移層の位置の特定が難しく困難である．しかし，領域が球の場合には [2, 13] において，球対称な内部遷移解の構成がなされている．

2 弱飽和効果

飽和効果のある場合には点凝集解が定常パターンとして得られ，飽和効果のある場合には内部遷移解が定常パターンとして得られることが先行研究により示されているが，次に，それらの中間的なパラメータとして，$\kappa > 0$ が ε による定数 $(\kappa = \kappa(\varepsilon))$ とした場合を考える．つまり，前に挙げた点凝集パターンや内部遷移パターンは全て $\varepsilon \to 0$ の時の漸近的形状による特徴付けであるが，κ も ε が小さくなるに従って小さくなっていくと仮定した場合である．

まずシャドウ系 (2) について形式的な考察ではあるが，仮に領域の閉包 $\overline{\Omega}$ 上のある点 x_0 に凝集する (2) の定常解 $(A_\varepsilon(x), \xi_\varepsilon)$ があると仮定する．補助的な関数 u_ε を次で導入する：

$$A_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon u_\varepsilon(x). \tag{3}$$

(2) にこれを代入する事で，u_ε は次を満たす事が分かる：

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon - u_\varepsilon + \dfrac{u_\varepsilon^2}{1 + \kappa \xi_\varepsilon^2 u_\varepsilon^2} \; in \; \Omega, \\ \xi_\varepsilon = \dfrac{|\Omega|}{\int_\Omega u_\varepsilon^2 dx}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \; on \; \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

さらに，u_ε は点 x_0 の近傍で，適当な関数 w を用いて次のように表されているとする：

$$u_\varepsilon(x) \sim w\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon^N}\right), \; \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

これを形式的に (4) の第一式に代入した後，$\varepsilon \to 0$ の極限をとると，次の w の満たすべき方程式が得られる（x_0 が境界上の点の場合には折り返し拡張を行う）：

$$0 = \Delta w - w + \frac{w^2}{1+\delta w^2}\ in\ \mathbb{R}^N. \tag{6}$$

ここで，$\delta = \kappa\xi_\varepsilon^2$ とおいた．この方程式は，$\delta \geq 0$ をパラメータと見たとき，ある $\delta_* > 0$ が存在し，$\delta \in [0, \delta_*)$ かつ $1 \leq N \leq 5$ の時，次を満たす解 w_δ が一意的に存在する事が知られている [18]:

$$w > 0\ in\ \mathbb{R}^N,\ \max_{z\in\mathbb{R}^N} w(z) = w(0),\ w(z) \to 0\ as\ |z| \to \infty. \tag{7}$$

さらに，その解 w_δ は球対称であり，二階偏導関数まで込めて遠方で指数関数的に減衰する事が知られている．

逆にこの全域解 w_δ を用いて，(5) のような漸近挙動を持つ (4) の解 u_ε を構成し，シャドウ系の解を構成できるであろうか．上で，$\delta = \kappa\xi_\varepsilon^2$ とおいたが，u_ε が (5) のように表されているとすると，(4) の第二式により，ξ_ε は $\varepsilon \to 0$ の時に ε^{-N} のオーダーで発散することが分かる．従って，δ と置いた $\kappa\xi_\varepsilon^2$ の値が $[0, \delta_*)$ の範囲に留まるためには，$\kappa = O(\varepsilon^{2N})$ でなくてなならない事が分かる．

以上形式的な考察であったが，シャドウ系 (2) が点凝集解を持つためには，$\kappa = O(\varepsilon^{2N})$ $(\varepsilon \to 0)$ が適切な条件である事が分かった．この条件を弱飽和条件と呼ぶ．この条件は最初，J. Wei 教授と M. Winter 教授によって提唱されたものである．実際に [18] において極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \kappa\varepsilon^{-2N} = \kappa_0 \in [0, \infty) \tag{8}$$

の存在を仮定し，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対してシャドウ系 (2) の点凝集解が存在する事が示されている．その後，倉田和浩教授と筆者の共同研究により，[18] と同じ弱飽和条件の下，領域が軸対称の場合で十分小さな ε に対してシャドウ系 (2)，及び十分大きな D に対する (1) の境界に複数のピークを持つ点凝集解の存在を示した．これらの結果はシャドウ系，または D が十分大きい場合のギーラー・マインハルト系に対する点凝集解の存在についてであるが，有限の任意に与えられた $D > 0$ に対しても，一次元の場合で，仮定 (8) の下，十分小さな ε に対して (1) は点凝集解を持つ事が分かっている [8]．その結果を定理の形で述べる．

Theorem 1. $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ とする．弱飽和条件 *(8)* を仮定し，さらに κ_0 は十分小さいものとする．この時，任意の $D > 0$ に対し，$\varepsilon_0 > 0$ が存在し，$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ の時，

(1) は原点 $x=0$ に凝縮する点凝集解 $(A_\varepsilon, H_\varepsilon)$ を持つ．より厳密には，各 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して，ある $\delta_\varepsilon \in [0, \delta_*)$ が存在し，A_ε は次の漸近挙動をもつ：

$$A_\varepsilon(x) \sim \frac{1}{\varepsilon \int_{\mathbb{R}} w_{\delta_\varepsilon}^2} \Big\{ \alpha_D w_{\delta_\varepsilon}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big) + O(\varepsilon) \Big\} \ (\varepsilon \to 0). \tag{9}$$

ここで，w_δ は *(6)-(7)* の一意解であり，α_D は

$$\alpha_D := \frac{\sinh(2\theta)}{\theta \cosh^2 \theta}, \ \theta := D^{-1/2},$$

で定義される．δ_ε は，κ_0 と D のみに依存するある定数 $\delta_0 \in [0, \delta_*)$ に収束し，δ_0 は次を満たす：

$$\delta_0 \Big(\int_{\mathbb{R}} w_{\delta_0}^2(y) dy \Big)^2 = \kappa_0 \alpha_D^2. \tag{10}$$

証明は従来から用いられている手法による．つまり，偶関数に制限した適当な空間におけるある作用素の可逆性を用いることで，全域解 w_δ を基にして作られた適当な近似関数の近くに真の解を不動点定理を用いて構成する事ができる．その作用素の可逆性を保証する際に，飽和効果のある場合の特有の難しさとして，次の作用素の核の解析が困難であることが挙げられる．

$$\mathcal{L}_\delta^* \psi := \psi'' - \psi + f_\delta'(w_\delta)\psi - 2\frac{\int_{\mathbb{R}} f_\delta(w_\delta)\psi}{\int_{\mathbb{R}} w_\delta^2} w_\delta, \ \psi \in H^2(\mathbb{R}), \tag{11}$$

ここで，$f_\delta(t) := t^2/(1+\delta t^2)$ とおいた．$\mathcal{L}_\delta^*$ に対して，少なくとも十分 $\delta \in [0, \delta_*)$ が小さい時には，

$$Ker(\mathcal{L}_\delta^*) \cap H_r^2(\mathbb{R}) = \{0\}, \ \ H_r^2(\mathbb{R}) = \{\psi \in H^2(\mathbb{R}) : \psi(x) = \psi(-x)\},$$

が言えるが，全ての $\delta \in [0, \delta_*)$ に対して言えるかどうかは不明である．仮に，それが出来たとすると，定理における「κ_0 は十分小さい」という仮定は排除できる．

3 他のモデルについて

前章までに，ギーラー・マインハルト系に関する飽和効果と定常解の形状の関係について述べた．他のモデル方程式に対しても，飽和効果の入ったモデルを考えることは出来る．例えば，[5] において，一般の N 次元有界領域 Ω における次の生物の走化性に関する

モデル方程式が扱われている.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla \cdot \left(P\nabla(\log \frac{P}{W^p})\right) \ in \ \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta W - W + \frac{P}{1+\kappa P} \ in \ \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \ on \ \partial\Omega \times (0,\infty), \\ P(x,0) = P_0(x), \ W(x,0) = W_0(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{12}$$

ここで, $P(x,t)$, $W(x,t)$ はそれぞれ生物の密度と走化性物質の濃度を表す. P_0, W_0 はそれらの初期値である. p は次を満たす定数である:

$$1 < p < \infty \ (N = 1, 2); \ 1 < p < \frac{N+2}{N-2} \ (N \geq 3).$$

(12) の第二式に, 飽和効果が含まれている事に注意する. 走化性モデルに対しても, 点凝集定常パターンの存在が多々研究されているが, 飽和効果を仮定したモデルはあまり扱われていない. [5] においては, 適当な対称性をもつ領域 (例えば軸対称性) に対し, 次の仮定の下で (12) の点凝集解の存在が示されている: $\kappa > 0$ は ε によるものとし, 次の極限が存在する:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \kappa \varepsilon^{-N} = \kappa_0 \in [0, \infty).$$

点凝集定常解を持つ偏微分方程式は他にも多々あるが, このように点凝集解が存在するための条件は方程式ごとに異なり, 飽和効果と定常解の関係について考察するは興味深い研究のように思われる.

参考文献

[1] M. del Pino, A priori estimates and applications to existence -nonexistence for a semilinear elliptic system, Indiana Univ. Math. J., 43 (1994) 77-129.

[2] M. del Pino, Radially symmetric internal layers in a semilinear elliptic system, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995) 4807-4837.

[3] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, Kybernetik (Berlin), 12 (1972) 30-39.

[4] K. Kurata and K. Morimoto, Construction and asymptotic behavior of the multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation, Commun. Pure Appl. Anal., 7 (2008) 1443-1482.

[5] K. Kurata and K. Morimoto, Existence of multiple spike stationary patterns in a chemotaxis model with weak saturation, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst.

[6] C.-S. Lin, W.-M. Ni and I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, J. Differential Equations, 72 (1988) 1-27.

[7] M. Mimura, M. Tabata and Y. Hosono, Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, SIAM J. Math. Anal., 11 (1980) 613-631.

[8] K. Morimoto, Point-condensation phenomena and saturation effect for the one-dimensional Gierer-Meinhardt system, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.

[9] W.-M. Ni, P. Poláčik and E. Yanagida, Monotonicity of stable solutions in shadow systems, Trans. Amer. Math., 353 (2001) 5057-5069.

[10] W.-M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solution to a semilinear Neumann problem, Comm. Pure Appl. Math., 44 (1991) 819-851.

[11] W.-M. Ni and I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, Duke Math. J., 70 (1993) 247-281.

[12] W.-M. Ni and I. Takagi, Point condensation generated by a reaction-diffusion system in axially symmetric domains, Japan J. Indust. Appl. Math., 12(1995) 327-365.

[13] K. Sakamoto, Internal layers in high-dimensional domains, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A., 128 (1998) 359-401.

[14] I. Takagi, Point-condensation for a reaction-diffusion system, J. Differential Equations, 61 (1986) 208-249.

[15] J. Wei and M. Winter, On the two-dimensional Gierer-Meinhardt system with strong coupling, SIAM J. Math. Anal., 30 (1999) 1241-1263.

[16] J. Wei and M. Winter, Spikes for the two-dimensional Gierer-Meinhardt system: the weak coupling case, J. Nonlinear Sci., 11 (2001) 415-458.

[17] J. Wei and M. Winter, Spikes for the Gierer-Meinhardt system in two dimensions: the strong coupling case, J. Differential Equations, 178 (2002) 478-518.

[18] J. Wei and M. Winter, On the Gierer-Meinhardt system with saturation, Commun. Contemp. Math., 6, (2004) 259-277.

[19] J. Wei and M. Winter, Existence, classification and stability analysis of multiple-peaked solutions for the Gierer-Meinhardt system in R^1, Methods Appl. Anal., 14 (2007) 119-163.